中興大學物理系
高中物理資優生輔導班

高二數學

（1）微分

授課教授：廖思善老師

E-mail：liaw@phys.nchu.edu.tw

HomePage：http://fractal.phys.nchu.edu.tw

2004 年 10 月

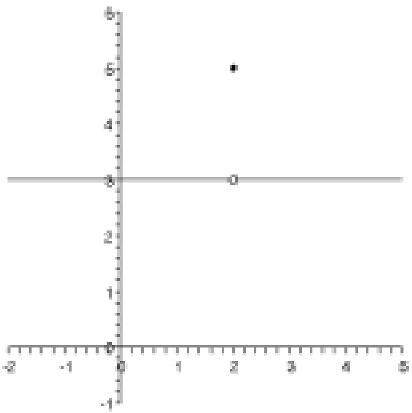
§ 微分

1. 極限與連續

如果 $f(p)$ 有定義，且 $\lim\limits_{x\to p} f(x)=f(p)$，則函數 f 在點 p 為連續的。

例:（a） $f(x)=3$ 與 $g(x)=x^2-1$ 在每一點都連續。

（b）$f(x)=\begin{cases}3, & x\neq 2\\ 5, & x=2\end{cases}$ 在 $x=2$ 處不連續，因為 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5\neq 3=f(2)$



練習:求下列各式的極限值

（a） $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2}$ （b）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

（c）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$ （d）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin 2x+x^2\cos 5x\right)$

（e） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

- $\underset{x\to 0}{\ell im}\dfrac{\sin x}{x}=1$，因為在$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 及-$\dfrac{\pi}{2}<x<0$時，$\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<\dfrac{1}{\cos x}$。

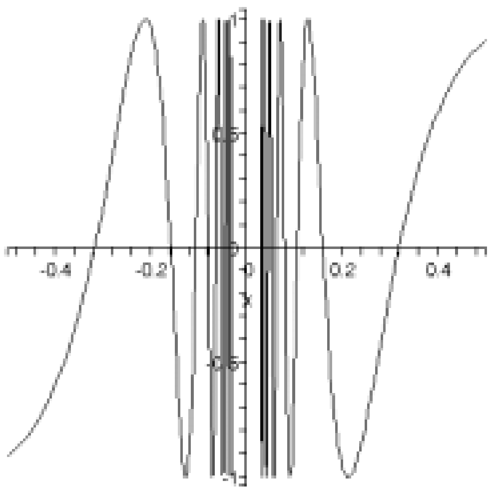
練習:

（a）$\underset{x\to 0}{\ell im}\dfrac{\sin 2x}{x}$　　　　（b）$\underset{x\to 0}{\ell im}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{x}$

（c）$\underset{x\to a}{\ell im}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$　　　　（d）$\underset{x\to 0}{\ell im}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

- $f(x)=\begin{cases}\sin(\dfrac{1}{x}), & if \quad x\neq 0\\ A \quad , & if \quad x=0\end{cases}$

  求A的值，使$f(x)$在$x=0$連續。



令 $x=\dfrac{1}{n\pi}$，則

$$\underset{x\to 0}{\ell im}\, f(x)=\underset{x\to\infty}{\ell im}\sin(n\pi)=0$$

令 $x=\dfrac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$，則

$$\underset{x\to 0}{\ell im}\, f(x)=\underset{n\to\infty}{\ell im}\sin(n+\frac{1}{2})\pi=1$$

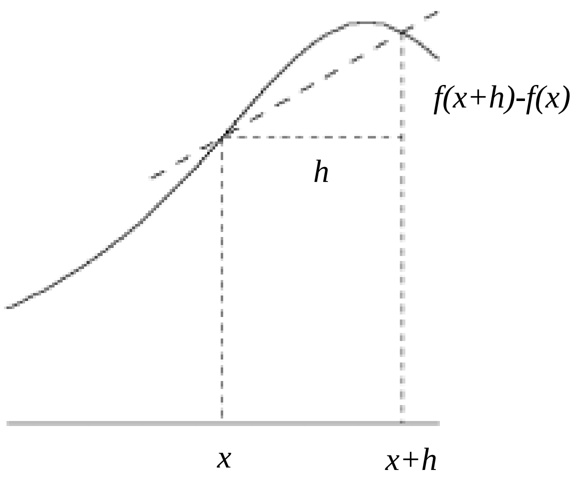
所以不存在一固定A值使得

$$\underset{h\to 0}{\ell im}\, f(x)=A$$

2. 導數

函數 $f(x)$ 的導數 $f'(x)$ 定義為 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

● 幾何解釋：切線斜率



● 符號

$f', f'', f''', \;\ldots\ldots$

$Df\;, D^2 f\;, D^3 f\;, \ldots\ldots$

$\dfrac{df}{dx}, \dfrac{d^2 f}{dx^2}, \dfrac{d^3 x}{dx^3}, \ldots\ldots\ldots$

- 簡單函數的導數

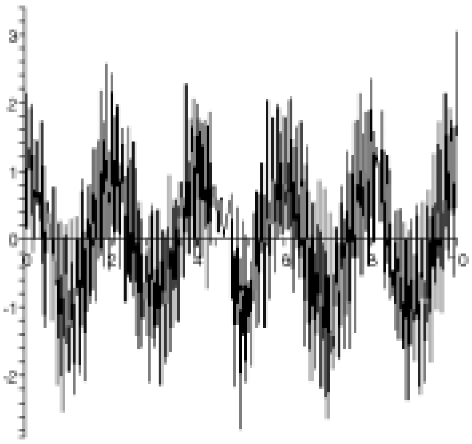
$f(x)$	$f'(x)$
c (常數函數)	0
$mx+b$ (線性函數)	m
x^n, n 為正整數	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$x^{1/n}$, n 為正整數	$\frac{1}{n}x^{1/n-1}$

- 函數 f 在 x 處可微分，則在 x 必連續。反之則不然，例如： $f(x)=\|x\|$ 在 $x=0$ 連續，但不可微分。

- 一個連續函數在每一個點都不可微分，可能嗎？

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \qquad 0<b<1,\ ab>1+\frac{3}{2}\pi,\ a \text{ 為奇數}$$

a=15, b=0.7



● 導數的運算

i) $(f+g)' = f' + g'$

ii) $(f-g)' = f' - g'$

iii) $(fg)' = fg' + gf'$

iv) $(\frac{f}{g})' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$

例:

(a) 多項式的微分

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \quad , \qquad f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k c_k x^{k-1}$$

(b) $f(x) = x^r$，$x > 0$，r 為有理數

$f'(x) = r x^{r-1}$

● 連鎖規則（chain rule）

$f(x)$ 與 $g(x)$ 都是可微分函數，則合成函數 $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ 可微分，其導函數為

$$h'(x) = f'(y) g'(x), \quad y = g(x)$$

使用萊布尼茲(Leibniz)的符號，令 $y = g(x)$，$z = f(y)$

我們寫成

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

例:

(a) $f(x)=\sin(x^2)$

$$f'(x)=\cos(x)^2\cdot 2x$$

(b) $f(x)=(x^2+1)^3$

$$f'=3(x^2+1)^2\cdot 2x$$

(c)圖 $x^2+y^2=r^2$ 的切線斜率

兩邊對 x 微分，得 $2x+2yy'=0$

所以 $y'=\dfrac{-x}{y}$

- 物理中的應用

位移 $x(t)$

速率 $v(t)=x'(t)$

加速率 $a(t)=v'(t)=x''(t)$

例:

(a) 已知位移

$$x(t)=v_o t-\frac{1}{2}gt^2,\ v_o, g \text{ 為常數}$$

則 $a(t)=\boxed{x''(t)=-g}$ 等加速運動的運動方程式

(b) $x(t)=A\cos(wt)$, A, w 為常數

則 $a(t)=\boxed{x''(t)=-w^2x(t)}$ 簡諧振盪的運動方程式