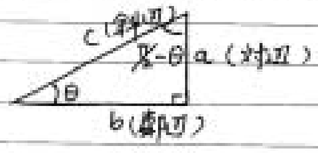
DATE

三角函數

高中理化資優學生輔導班（數學）

Humor is spirit

(I) 銳角三角函數與基本恆等式



(1) 定義：

$\sin\theta = \frac{a}{c}$ $\csc\theta = \frac{c}{a}$ (θ的餘割)

$\cos\theta = \frac{b}{c}$ $\sec\theta = \frac{c}{b}$ (θ的正割)

$\tan\theta = \frac{a}{b}$ $\cot\theta = \frac{b}{a}$ (θ的餘切)

(2) 基本恆等式

(A) 平方關係式

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

(B) 倒數關係式

$\csc\theta \cdot \sin\theta = 1$ 或 $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

$\sec\theta \cdot \cos\theta = 1$ 或 $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$ 或 $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

(C) 商數關係式

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(D) 餘角關係式

$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta$

$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$

$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cot\theta$

$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta) = \tan\theta$

$\sec(\frac{\pi}{2}-\theta) = \csc\theta$

$\csc(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sec\theta$

Humor is spirit

Ex: (1) 设 $f(n)=\cos^n\theta+\sin^n\theta$ 试证 $3f(4)-2f(6)=1$

(2) 试证下列恒等式:

(a) $\cos^4\theta-\sin^4\theta=2\cos^2\theta-1$

(b) $2+\cot^2\theta=\csc^2\theta+\sec^2\theta-\tan^2\theta$

(3) 设 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$ 试求下列各值:

(a) $\sin\theta\cdot\cos\theta$

(b) $\sin\theta+\cos\theta$

(c) $\tan\theta+\cot\theta$

(4) 试证 $\cos\theta(1+2\tan\theta)(\tan\theta+2)=\frac{2}{\cos\theta}+5\sin\theta$

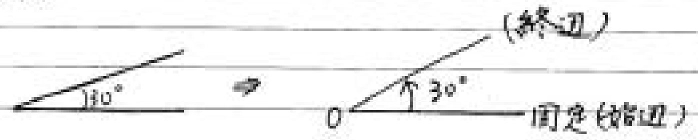
YU IAI 育台精選

Humor is spirit

(II) 廣義角的三角函數

(A) 廣義角的定義：

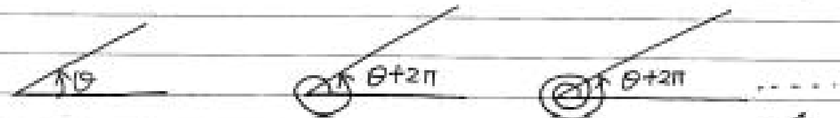
一角有二邊，如果把此角看成最初二邊重合，後來另一邊固定，一邊繞著頂點旋轉，轉成的角。則我們可將角的定義推廣為廣義角。



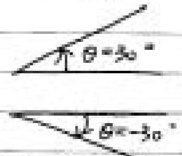
此時，有相同始邊、終邊的角有無窮多個

θ 和 $\theta+2n\pi$　　$(n\in I)$

稱凡有相同始邊、終邊的角，它們之間稱為同界角。如



Note: ① θ 正的表逆時針旋轉的角如



θ 負的〃順〃〃〃〃〃〃如

② $2n\pi$ 中 n 是正整數，表轉了 n 轉（逆時針）

$2n\pi$ 中 n 是負〃〃，表順時針轉了 n 轉。

③ 同界角的例子：(a) 450° 和 90°

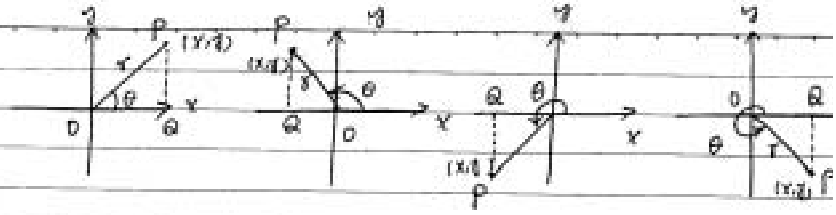
(b) 690° 和 -30°

(B) 廣義角的三角函數

將一廣義角 θ 的始邊當作 $+x$ 軸，角的頂點當原點，在終邊上取一點 P

若其坐標為 (x, y)

Humor is spirit



定義 $\sin\theta = \frac{y}{r}$ $\csc\theta = \frac{r}{y}$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\sec\theta = \frac{r}{x}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\cot\theta = \frac{x}{y}$

Note: (1) 当点P在x軸上时 ∵ $y=0$ ⇒ $\csc\theta$ 与 $\cot\theta$ 無意義

(i.e. $\theta = 2n\pi$ 或 $\theta = 2n\pi+\pi$ $n \in \mathbb{Z}$)

(2) 当点P在y軸上时 i.e. $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ 或 $2n\pi - \frac{\pi}{2}$

∵ $x=0$ ⇒ $\tan\theta$ 与 $\sec\theta$ 無意義

(3) 当θ是锐角时，定義与第一節定義相同

(三角函數)

(4) 六个三角函數在可定義的角度仍有

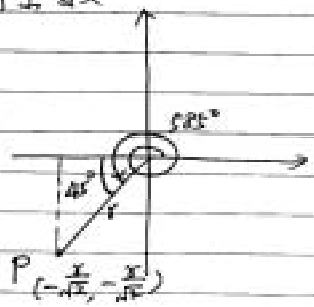
平方関係，倒數関係与商數関係

(ex) $\theta = 585^\circ$ 试求此角的六个三角函數

∴ $\sin 585^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\csc 585^\circ = -\sqrt{2}$

$\cos 585^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sec 585^\circ = -\sqrt{2}$

$\tan 585^\circ = 1$ $\cot 585^\circ = 1$



Humor is spirit

(C) 廣義角三角函數計算所需要的公式

(I) $\sin(n\times 360^\circ \pm \theta) = \pm \sin\theta$

$\cos(n\times 360^\circ \pm \theta) = \pm \cos\theta$

$\tan(n\times 360^\circ \pm \theta) = \pm \tan\theta$

$\cot(n\times 360^\circ \pm \theta) = \pm \cot\theta$

$\sec(n\times 360^\circ \pm \theta) = \pm \sec\theta$

$\csc(n\times 360^\circ \pm \theta) = \pm \csc\theta$

$n \in I$

(II) $\sin(n\times 180^\circ \pm \theta) = \pm \sin\theta$

$\cos(n\times 180^\circ \pm \theta) = \pm \cos\theta$

$\tan(n\times 180^\circ \pm \theta) = \pm \tan\theta$

$\cot(n\times 180^\circ \pm \theta) = \pm \cot\theta$

$\sec(n\times 180^\circ \pm \theta) = \pm \sec\theta$

$\csc(n\times 180^\circ \pm \theta) = \pm \csc\theta$

$n \in I$

(I)(II)(III) 公式中右边取正或取負要看左边角度所在象限的三角函數值是正是負而定。三角函數值是正,右边取正号,反之取負号

(III) $\sin[(2n+1)\times 90^\circ \pm \theta] = \pm \cos\theta$

$\cos[(2n+1)\times 90^\circ \pm \theta] = \pm \sin\theta$

$\tan[(2n+1)\times 90^\circ \pm \theta] = \pm \cot\theta$

$\cot[(2n+1)\times 90^\circ \pm \theta] = \pm \tan\theta$

$\sec[(2n+1)\times 90^\circ \pm \theta] = \pm \csc\theta$

$\csc[(2n+1)\times 90^\circ \pm \theta] = \pm \sec\theta$

$n \in I$

YUTAI 育台精品

Humor is spirit

(ex) $\tan 755^\circ = \tan(2\times 360^\circ + 35^\circ)$

$= +\tan 35^\circ$ ⇐ ∵ $2\times 360^\circ + 35^\circ$ 在第一象限
第一象限 tan 為正 故取正号

(ex) $\sin 930^\circ = \sin(180^\circ \times 5 + 30^\circ)$

$= -\sin 30^\circ$ ⇐ 930° 在第三象限。
第三象限 sin 為負故取負号

(ex) $\tan(-290^\circ) = \tan[(-1)\times 360^\circ + 70^\circ]$

$= +\tan 70^\circ$ ⇐ -290° 在第一象限
第一象限 tan 為正 故取正号

(ex) $\cos(-587^\circ 23') = \cos[(-3)\times 180^\circ - 47^\circ 23']$

$= -\cos 47^\circ 23'$ ⇐ $-587^\circ 23'$ 在第二象限
第二象限 cos 為負 故取負号

練習

1. 試求下列諸函數值
   (a) $\sin 585^\circ$
   (b) $\cos 930^\circ$
   (c) $\tan 6420^\circ$

2. 化簡下式
   $\sin 60^\circ \cdot \cos 150^\circ - \cos 225^\circ \cdot \sin 315^\circ + \tan 300^\circ \cdot \sec 180^\circ$
   $= p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3}$
   則 $p =$ ____, $q =$ ____, $r =$ ____。