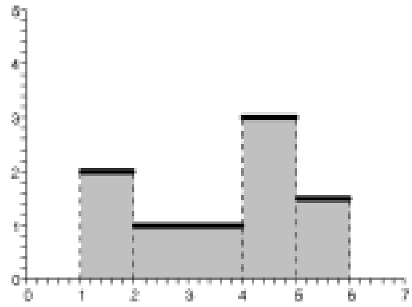
§ 積分

- 階梯函數(step function)

$$s(x)=s_n \quad if \quad x_{k-1}<x<x_k \ , \ k=1,2,3......,n$$



- 階梯函數的積分

$$\int_a^b s(x)dx=\sum_{k=1}^{n} s_k\cdot(x_k-x_{k-1})$$

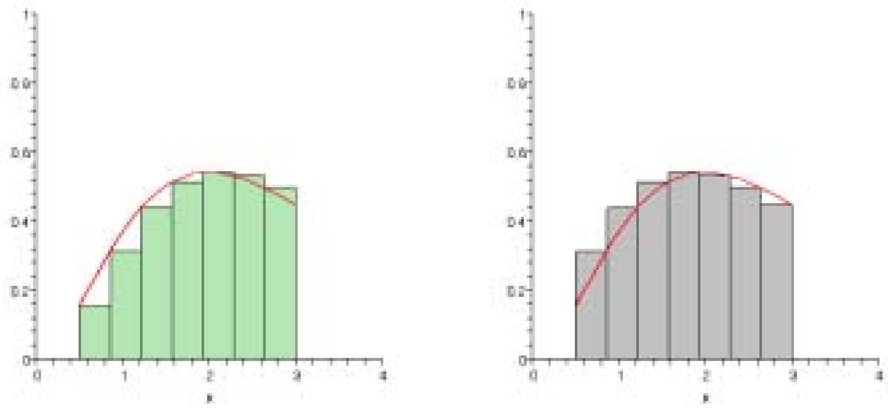
- 函數的積分

設函數 $f(x)$ 定義在區間 $[a,b]$ 含 $s(x)$與$f(x)$ 為區間上的兩階梯函數,

且 $s(x)\le f(x)\le t(x)$

若存在唯一值 I 使得對所有滿足上式的 $s(x)$ 與 $f(x)$ 滿足

$\int_a^b s(x)dx\le I\le\int_a^b t(x)dx$ 則 I 為函數$f(x)$ 的積分值，記作 $I=\int_a^b f(x)dx$。

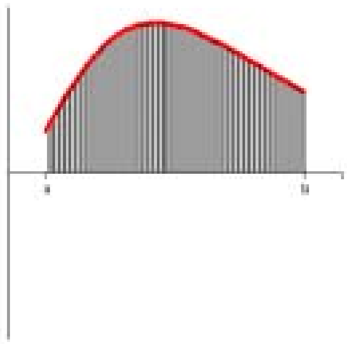


- 幾何解釋

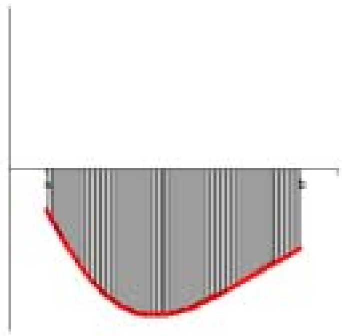
如果 $f(x)>0, x\in[a,b]$ 則 $\int_a^b f(x)dx$ 代表函數 $f(x)$與x軸所圍成之區域面積。

如果 $f(x)<0$, $x\in[a,b]$, 則$\int_a^b f(x)dx$ 代表函數 $f(x)$ 與 x 軸所圍成區域的面積,

再乘以-1。



$$A=\int_a^b f(x)dx$$



$$A=-\int_a^b f(x)dx$$

- 定義

$$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

- 積分基本性質

1) $\int_a^b (\sum c_k f_k(x))dx=\sum c_k(\int_a^b f_k(x)dx)$

2) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$

4) $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f(\frac{x}{k})dx$, $k \neq 0$

5) $If \quad g(x) \leq f(x) \quad for \quad x \in [a, b]$ $, then \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$

- 不定積分

$$\mathrm{F(x)} = \int_c^x f(t)dt$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &= \int_c^a f(t)dt - \int_c^b f(t)dt \\ &= F(a) - F(b) \\ &= F(x)\Big|_a^b\end{aligned}$$

- 微積分第一基本定理

$$A(x) = \int_c^x f(t)dt \quad \Rightarrow \quad A'(x) = f(x)$$

- 微積分第二基本定理

$$P'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad P(x) = P(c) + \int_c^x f(t)dt$$

練習:

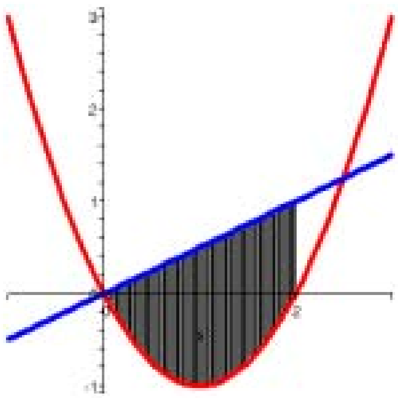
1. $\int_a^b x^n dx$ 2. $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 3. $\int_a^b \sin x \, dx$

4. $\int_a^b \frac{x^4 + x - 3}{x^3} dx$ 5. $\int_a^b (1+\sqrt{x})^2 dx$, $x > 0$

6. $f(x) = \int_a^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4} dt$, 求 $f'(x)$。

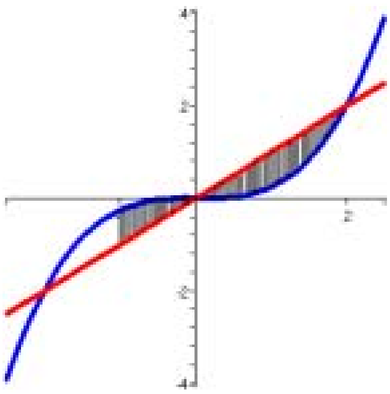
7.求下面圖形斜線區域的面積。

$f(x) = x^2 - 2$



$g(x) = x/2$

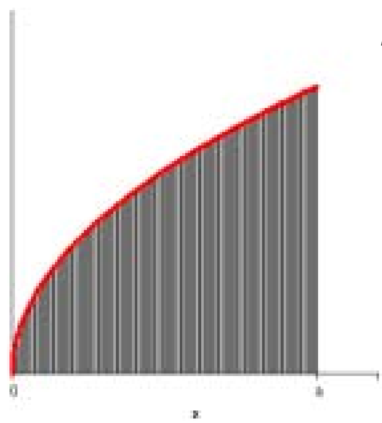
8.求下面左圖斜線區域的面積。



$f(x) = x$

$g(x) = x^3/4$

$f(x) = \sqrt{x}$



9.求上面右圖斜線區域的面積。

- 積分方法

  a. 替代法(integration by substitution)

  若 $F'(x) = f(x)$

  則 $\int f(x)dx = F(x) + c$

  設 $p(x) = F(g(x))$，利用連鎖規則　$p'(x) = f(g(x))g'(x)$

  因此　$\int f(g(x))g'(x)dx = p(x) + c$

範例： 求 積分 $\int 3x^2 \cos(x^3)dx$。

令 $g(x) = x^3$, $f(x) = \cos x$, 則 $F(x) = \sin x$

所以　$\int 3x^2 \cos(x^3)dx = \int f(g(x))g'(x)dx = \sin(x^3) + c$

- 令　$u = g(x)$ ，　則替代法可以寫成

$$\int f(u)\frac{du}{dx}dx = F(u) + c$$

$$= \int f(u)du$$

練習：

a. $\int x^3 \cos(x^4)dx$

b. $\int \cos^2 x \ \sin x \, dx$

c. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

d. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

b. 部分積分法（integration by parts）

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big)= f'(x)g(x)+ f(x)g'(x)$$

所以

$$\int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)+c$$

或者

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx+c$$

範例：

a. $\int x\cos x \; dx$

令 $f(x)=x \quad , g(x)=\sin x \quad , g'(x)\cos x$

則 $\int x\cos x dx=\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx+c$

$$= x\sin x-\int \sin x \; dx+c$$

$$= x\sin x+\cos x+c$$

b. $\int x^2\cos x \; dx$

$$=\int x^2\frac{d}{dx}(\sin x)dx = x^2\sin x-\int 2x\sin x \; dx+c$$

$$= x^2\sin x+2\int x\frac{d}{dx}(\cos x)dx+c$$

$$= x^2\sin x+2\left\lfloor x\cos x-\int \cos x \; dx+c' \right\rfloor+c$$

練習:

a) $\int \sin x\cos x \, dx$ b) $\int \sin^2 x \; dx$

c) $\int x\,\ell og x \; dx$ d) $\int x^2 e^{x^3} dx$

e) $\int e^x\sin x \; dx$ f) $\int \frac{dx}{1+e^x}$

• 數值積分

矩形法

梯形法

高斯法

蒙地卡羅方法

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \ < f(x) >$$

$$< f(x) >= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \quad , x_i \quad \text{is a random number in [a, b]}$$