Chapter 1 時間與空間

1. 物理量：凡能用數量表示之物理性質稱之為物理量。
   a. 基本量—時間：T，長度：L，質量：M。
   b. 誘導量—由基本量導出之量。例如：力（$1Nt=1kg \cdot m/s^2$），能量（$1J=1kg \cdot m/s^2$）

2. 單位：
   (1)國際標準單位（SI，System International）即公制或 mks 制。
      時間：sec(秒)，^{133}Cs 原子之某種震盪之 9,192,631,770 倍。
      長度：m(公尺)，光于真空中 299,792,458 分之一秒走的距離。
      質量：kg(公斤)，某鉑-銥合金圓柱體。
   (2)cgs 制
      時間：sec(秒)
      長度：cm(公分)$=10^{-2}$m
   (3)英制
      時間：sec(秒)
      長度：in(英吋)，1 in=2.54cm。
      質量：slug，1 slug=14.5939kg （$1kg \cdot g=2.2lb$）

3. 若 A=B，A 與 B 必然是相同物理量：因此$[L^{\alpha}T^{\beta}M^{\gamma}]$或單位必須一致。
   橘子≠蘋果。

※ 參考資料：
   (1)林重信編著：宇宙學精粹，力學精粹。
   (2)部定課本。

Chap 2．運動學

1. 力學：研究運動及其成因之科學。
   運動學：描述運動狀態，及物體在空間的位置與時間之關係。
   動力學：運動之成因。

2. 一般而言物理量
   純量：只有大小但無方向性者，如體積、溫度、質量等。
   向量：具有大小且有方向性者(或稱矢量)，如速度，加速度，力，等。

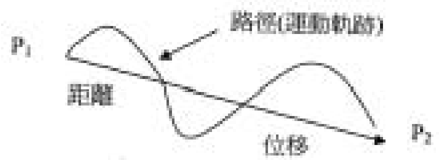
◎直線運動

1. 位置：質點所在之空間座標或質點對另一質點之空間關係稱為位置。位置為一相對觀念，即論及某物之位置時候，先定地球上某一點(參考點)為標準。參考點可隨意選擇，如台中位於台北南方約150公里或位於彰化北方約20公里。凡質點之位置不隨時間而變化者稱為靜止，隨時間變化者稱為運動。

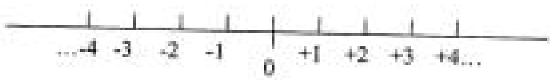
2. 位移：質點位置改變之量，包括大小及方向，為一向量(與座標原點無關)，若質點運動後回復原位，其位移為0。

3. 距離：兩位置間直線長度，只論大小不含方向。

4. 路徑：質點運動之軌跡不一定為直線，可為曲線，此軌跡之長度為路徑。



質點在一直線上運動，取一定點0為參考點稱為原點，以定義位置。

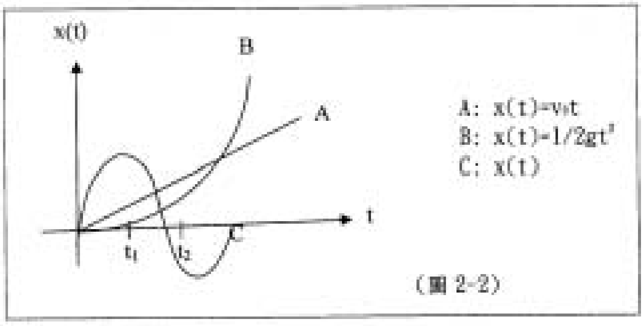


(由±號可知位置亦為一向量)而隨時間變化 $x=x(t)$

§ 2-1(1)　速度：物體位移之時間變化率，有大小及方向。
　　　　　速率：質點路徑之變化率，無關方向。

設質點的位置 $x(t_1)=x_1$，$x(t_2)=x_2$，在 t_2-t_1時間中之平均速度為

$\bar{v}=\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$：位移之平均變化率，單位為公尺/秒（與 t_2，t_1間運動細節無關）



（圖 2-2）

圖 2-2 中之 A，$x(t)=v_0t$，v_0為一常數

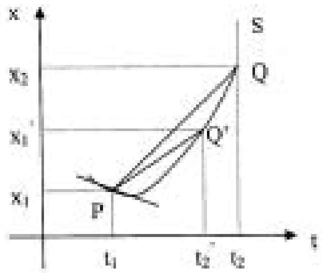
$$\bar{v}=\frac{v_0t_2-v_0t_1}{t_2-t_1}=v_0$$，與(t2-t1)或(x2-x1)無關，為一定值。

∴A 為一"等速運動"

而 B 曲線

$$\bar{v}=\frac{\frac{1}{2}gt_2^2-\frac{1}{2}gt_1^2}{t_2-t_1}=\frac{1}{2}g(t_2+t_1)$$，與 t 有關。

*瞬時速度　（現在速度=?）



在 t_1與 t_2之間

$\bar{v}=\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\overline{PQ}$之斜率

在 t_1，t_2' 之間

$\bar{v}=\dfrac{x_1'-x_1}{t_2'-t_1}=\overline{PQ'}$之斜率

令 $x_2 = x_1 + \Delta x,\quad t_2 = t_1 + \Delta t$

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(x_1 + \Delta x) - x_1}{(x_1 + \Delta x) - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2\text{-}7)$$

$\Rightarrow v(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ = 質點在 t_1 時（或在 x_1 處）的瞬時速度

=x-t 圖上曲線 S 在 P 點之切線斜率。

例 2-1. 圖 2-2 中 A 與 B 之瞬時速度

A: $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0 \cdot (t + \Delta t) - v_0 \cdot t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0 \cdot \Delta t}{\Delta t} = v_0$

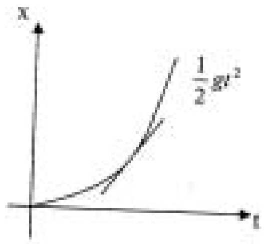
⇒等速運動中任二時刻間之平均速度與任何時刻 t 時之瞬時速度同。

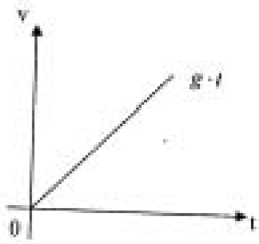
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2}{\Delta t}$$

B:
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g \cdot t \cdot \Delta t + \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2}{\Delta t}$$

$$= g \cdot t + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} g \Delta t \to 0$$

$$= g \cdot t$$





note
$v(t = 0) = 0$

＊若有一運動 $x(f) = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$

$$\Rightarrow v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0 \cdot (t + \Delta t) + \frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 - v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2}{\Delta t} = v_0 +$$

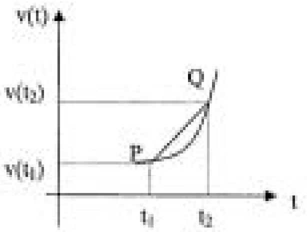
$v(0) = v_0$ "通常" t=0 時之速度稱為初速度。

§ 2-1(2)

＊加速度

$$\bar{a} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \equiv \frac{\Delta v}{\Delta t}$$ = 平均加速度=速度之平均時間變化率

瞬時速度相



$\bar{a} = \overline{PQ}$ 之斜率

＊瞬時加速度　$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$,　$[a] = L/T^2$

若非等速度運動則必有加速度，若加速度不隨時間改變稱為等加速運動。

例 2-2　給定 $x(t)$ 則 $a(t) = ?$

A: $x = v_0 t$

$\Rightarrow v(t) = v_0$

$\Rightarrow a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = 0$　：等加速運動之特例。

D

B: $x(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$

$\Rightarrow v(t) = g \cdot t$

$\Rightarrow a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t+\Delta t) - g \cdot t}{\Delta t} = g$　：等加速度

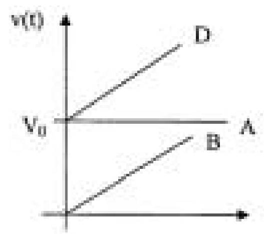
D: $x(t) = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$

$\Rightarrow v(t) = v_0 + g \cdot t$

$\Rightarrow a(t) = g$

t^2

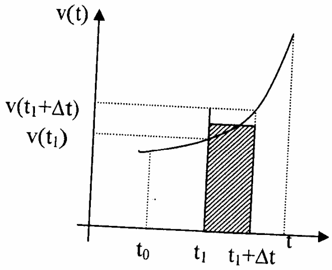
$- = v_0 + gt$



注意斜率

§ 2-1(3) 等加速運動

若已知$x=x(t) \Rightarrow v(t)$及$a(t)$可知。若已知$a(t)$為何，反推$x(t)$先由$v=v(t)$談



在$t_1 \to t_1+\Delta t$之間所行距離Δx

$v(t_1)\Delta t < \Delta x < v(t_1+\Delta t)\cdot\Delta t$

然 $\Delta x \cong \frac{1}{2}[v(t_1)+v(t_1+\Delta t)]\Delta t$

即陰影部份之面積會近似

而且 $\Delta x = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}[v(t_1)+v(t_1+\Delta t)]\Delta t$

圖 2-6

現將$t_0 \to t$分成 N 等份$N = {}^{t-t_0}\!/_{\Delta t}$，　$\Delta t \downarrow \Rightarrow N\uparrow$

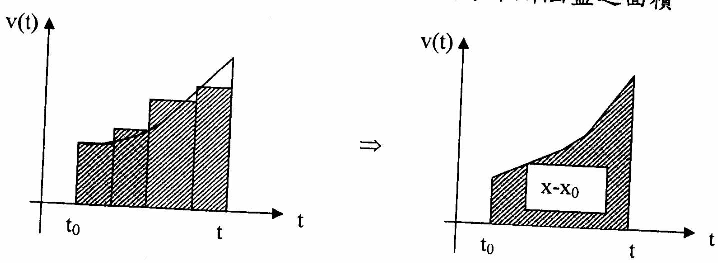
$$\Rightarrow \sum_i \frac{1}{2}[v(t_i)+v(t_i+\Delta t)]\Delta t \cong \sum_i \Delta x_i = x - x_0$$

而且當$N\to\infty$時兩者相等，即

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{2}[v(t_i)+v(t_i+\Delta t)]\Delta t \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{i=0}^{N-1} V(t_i)\Delta t \end{aligned} \qquad (2\text{-}14)$$

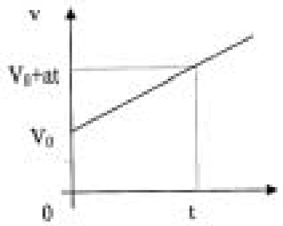
當$\Delta t\to 0$時 $\frac{1}{2}[v(t_i)+v(t_i+\Delta t)] \to v(t_i)$

(2-14)的幾何意義為：所行距離即$V(t)$圖形下所涵蓋之面積



例 2-3　設等加速運動始于 $t=0$,　$X(0)=x_0$,　$V(0)=V_0$　,　$a(t)=a=$ 常數

由前可知　$V(t)=V_0+at$ 為一直線，其下面積為



$$\frac{1}{2}[v_0+(v_0+at)]\cdot t=v_0 t+\frac{1}{2}at^2=x-x_0 \quad (2\text{-}16)$$

由 $v_0=v_0+at \Rightarrow \frac{v-v_0}{a}=t$ 代入(2-16)

得 $x-x_0=\frac{v^2-v_0^2}{2a}$　　(2-17)

$\Rightarrow (v^2-2ax)=(v_0^2-2ax_0)$

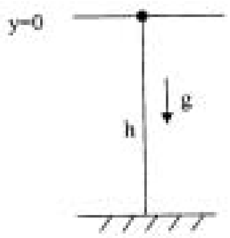
即 (v^2-2ax) 量不隨時改變：守恆量

Summary: 等加速 a 運動

$$\begin{cases} v(t)=v_0+at \\ x(t)=x_0+v_0 t+\frac{1}{2}at^2 \\ v^2=v_0^2+2a(x-x_0) \\ (v^2-2ax)\text{守恆} \end{cases}$$

例 2-4　地表因重力⇒重力加速度 g=9.8 m/s^2 向下

a)一物由距地面 h 公尺處自由落下，問需時若干落至地面並落地時速度為何？



取向下為+∴　$a=+9.8\,{}^{m}/_{s^2}=g$

已知：$v_0=0$　,　　$y-y_0=+h$

$\therefore h=v_0 t+\frac{1}{2}gt^2$

$\therefore t=\sqrt{2h}/_{g}\ s$

$v=v_0 t+gt=g\sqrt{2h}/_{g}=\sqrt{2gh}\ {}^{m}/_{s}$　(+號∴向下)

$$\left[\begin{array}{l} *\text{若取向上為+，則 } a=-9.8\,{}^{m}/_{s^2}=-g \text{ 而 } y-y_0=-h \\ \therefore -h=-{}^{1}/_{2}gt^2 \Rightarrow t=\sqrt{2h}/_{g}=\text{而}=-gt=-\sqrt{2gh} \text{ 亦為向下} \\ \therefore\text{結論與座標取法無關但應該一致} \end{array}\right]$$

b)若在地面上以 V_0 垂直上拋，求最高點高度 H 及所需時 t_1

取向上為+　⇒ a = - g 且 v_0 為+, 並地面 y=0

$=v(t)$ 談起

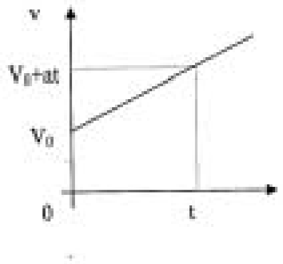
t

Δt

$\Delta t)]\Delta t$

例 2-3　設等加速運動始于 $t=0$,　$X(0)=x_0$,　$V(0)=V_0$　,　$a(t)=a=$ 常數

由前可知　$V(t)=V_0+at$ 為一直線，其下面積為



$$\frac{1}{2}[v_0+(v_0+at)]\cdot t=v_0t+\frac{1}{2}at^2=x-x_0 \qquad (2\text{-}16)$$

由 $v_0=v_0+at\Rightarrow\frac{v-v_0}{a}=t$ 代入(2-16)

得 $x-x_0=\frac{v^2-v_0^{\,2}}{2a}$ (2-17)

$$\Rightarrow(v^2-2ax)=(v_0^{\,2}-2ax_0)$$

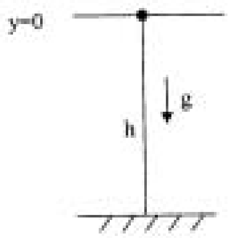
即 (v^2-2ax) 量不隨時改變：守恆量

Sumary: 等加速 a 運動

$$\begin{cases} v(t)=v_0+at \\ x(t)=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 \\ v^2=v_0^{\,2}+2a(x-x_0) \\ (v^2-2ax)\text{守恆} \end{cases}$$

例 2-4　地表因重力⇒重力加速度 g=9.8 m/s² 向下

a)一物由距地面 h 公尺處自由落下，問需時若干落至地面並落地時速度為何？



取向下為+∴　$a=+9.8\,{}^{m}/_{s^2}=g$

已知：$v_0=0$　,　　$y-y_0=+h$

$$\therefore h=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore t=\sqrt{2h}\Big/g\ s$$

$$v=v_0t+gt=g\,\sqrt{2h}\Big/g=\sqrt{2gh}\ {}^{m}/_{s} \quad (+\text{號}\therefore\text{向下})$$

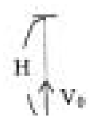
＊若取向上為+，則 $a=-9.8\,{}^{m}/_{s^2}=-g$ 而 $y-y_0=-h$

$\therefore -h=-{}^{1}/_{2}\,gt^2\Rightarrow t=\sqrt{2h}\Big/g=$ 而 $=-gt=-\sqrt{2gh}$ 亦為向下

∴結論與座標取法無關但應該一致

b)若在地面上以 V_0 垂直上拋，求最高點高度 H 及所需時 t_1

取向上為+　⇒ $a=-g$ 且 v_0 為+，並地面 $y=0$



$\because y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$

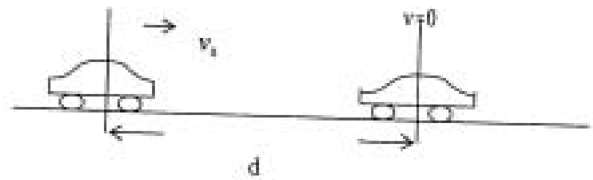
$\therefore H = v_0 t_1 - \frac{1}{2}gt_1^{\ 2}$　而$\because$在最高點$V = 0 = V_0 - gt_1 \therefore t_1 = \frac{v_0}{g}$

$\Rightarrow H = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g \cdot \frac{v_0^{\ 2}}{g^2} = \frac{v_0^{\ 2}}{2g}$

$$\left(\begin{array}{l} \text{由} v^2 = v_0^2 + 2a(y - y_0) \\ \therefore 0 = v_0^2 - 2gH \Rightarrow H = {v_0^2}/{2g} \end{array}\right)$$

＊程序 ①未知為何②已知為何③定好坐標運用關係(公式)

例 2-5



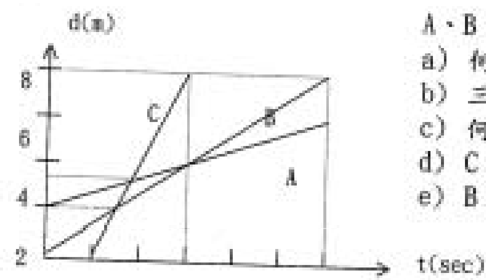
問加速為何需時若干？

取向右為+及v_0處為$x_0 = 0 \Rightarrow$已知$x = +d$，$v = 0$

$\therefore v^2 = v_0^2 + 2ax \Rightarrow 0 = v_0^2 + 2ad \Rightarrow a = \frac{-v_0^2}{2d}$

由$v = v_0 + at \Rightarrow 0 = v_0 - \frac{v_0^2}{2d} \cdot t \Rightarrow t = \frac{2d}{v_0}$

ex. a ：



A、B、C 三車位置與時間關係圖

a） 何者速率最大？

b） 三車有可能在路上同時相遇？

c） 何時 C 追及 B？此時 A 在何處？

d） C 追及 B 後，再行多遠可追及 A？

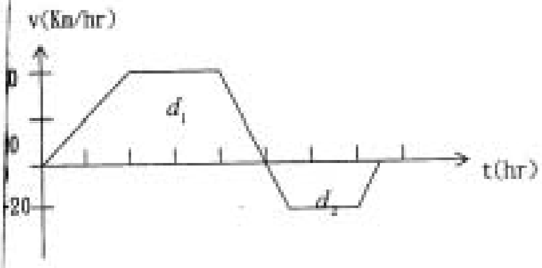
e） B 追及 A 時，C 在何處？

a) C　　b) No　　c) t=1.5 sec

d)~1.3m　　e) d=8m

b ：

汽車在直線公路上行駛 ，其速度與時間關係圖。



$\frac{v_0}{g}$

式)

) 何時速度最大？　　$t=2 \to t=4$

) 何時速度最小？　　$t=5.5 \to t=7.0$hr　v=-20km/hr 故最小

) 何時速度為0？　　t=0、5、7.5

等加速熱車

) 何 時 加 速 度 最 大 ？　　$t=7.0 \to t=7.5$

$$a=\frac{0-(-20)}{7.5-7.0}=40\,{}^{km}\!/_{hr^2}$$

e) 何時加速度最小？　　$t=4 \to t=5.5$ $a<0$

f) 何時加速度為0？　　$t=2 \to t=4$ 及 $t=5.5 \to 7.0$ 斜率為0

g) v為負值時其面積代表什麼？　　$d_2=\frac{1}{2}(2.5hr+1.5hr)(-20\,{}^{km}\!/_{hr})=-40$

表向回走

h) t=7.5hr 時離原點多遠？　　$d_1=\frac{1}{2}(5+2)\cdot 40=140km$

$\therefore d=d_1+d_2=140-40=100km$

關係圖

時相遇？

在何處？

可追及A？

？

1.5 sec